

Esercitazioni per il Corso di Fisica

Dinamica

Prof. Luca Pacher

Corso di Laurea in Farmacia

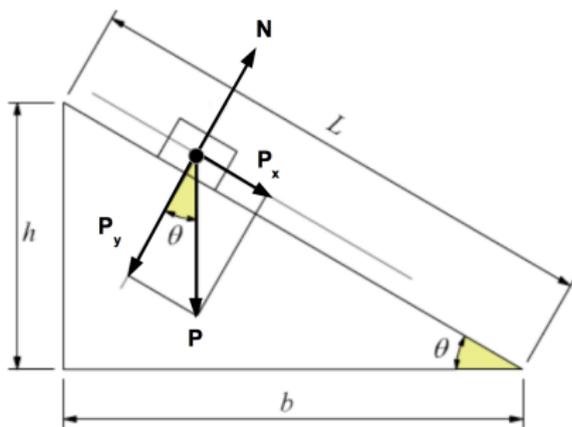
A.A. 2022/2023

04/11/2022

Sul **piano inclinato** :

*Un corpo di massa 1 kg inizialmente fermo è posto su una rampa **priva di attrito** lunga 10 m e alta 5 m.*

- con quale accelerazione scende il corpo ?*
- quanto tempo impiega ad arrivare in fondo alla rampa se parte dall'estremo superiore ?*
- con quale velocità giunge alla base della rampa ?*



Cosa sappiamo dal testo dell'esercizio :

$$m = 1 \text{ kg} , \quad h = 5 \text{ m} , \quad L = 10 \text{ m} , \quad v_0 = 0 \text{ m/s}$$

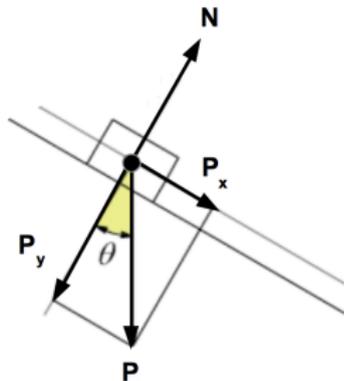
Dalla geometria :

$$\sin \theta = \frac{h}{L} = \frac{5 \text{ m}}{10 \text{ m}} = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = 30^\circ \text{ e quindi anche } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

- le **forze** che agiscono sulla massa sono la **forza peso** $\mathbf{P} = m g$ e la **reazione vincolare** del piano \mathbf{N} .
- non ci sono forze di attrito per ipotesi (piano ideale, perfettamente liscio)
- scelgo un sistema di riferimento cartesiano (x, y) che giace sul piano inclinato
- rispetto a questo sistema di riferimento possiamo andare a **scomporre la forza peso** in una **componente normale** (perpendicolare al piano) e in una **componente longitudinale** (parallela al piano) :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_x + \mathbf{P}_y$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_y = P \cos \theta = m g \cos \theta \\ P_x = P \sin \theta = m g \sin \theta \end{array} \right.$$



Infine applichiamo la **legge di Newton** nella forma :

$$\sum \mathbf{F} = m \mathbf{a} \rightarrow \begin{cases} P_y - N = 0 \text{ (no moto lungo la direzione perpendicolare)} \\ P_x = m a \rightarrow m g \sin \theta = m a \end{cases}$$

La componente normale della forza peso è **bilanciata dalla reazione vincolare** del piano :

$$P_y = N \rightarrow \boxed{N = m g \cos \theta}$$

Lungo la componente parallela invece ho un **moto rettilineo uniformemente accelerato** di accelerazione :

$$\boxed{a = g \sin \theta} = \frac{g}{2} = \frac{9.81 \text{ m/s}^2}{2} = 4.91 \text{ m/s}^2$$

Nota l'accelerazione applichiamo i risultati di **cinematica** che già conosciamo per il moto rettilineo uniformemente accelerato :

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad , \quad v(t) = v_0 + a t \quad , \quad v^2 - v_0^2 = 2 a (x - x_0)$$

Condizioni iniziali :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ v_0 = 0 \text{ (la massa è inizialmente ferma)} \end{cases}$$

Tempo impiegato a scendere la rampa di lunghezza L :

$$L = \frac{1}{2} a t^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{20 \text{ m}}{4.905 \text{ m/s}^2}} = 2.02 \text{ s}$$

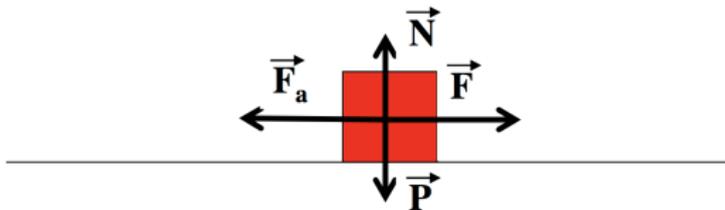
Velocità massima raggiunta :

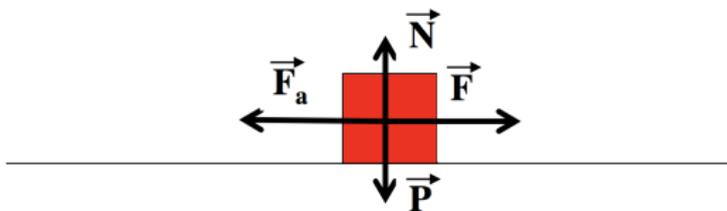
$$v_{max}^2 = 2aL \rightarrow v_{max} = \sqrt{2aL} = \sqrt{20 \text{ m} \cdot 4.905 \text{ m/s}^2} = 9.9 \text{ m/s}$$

Sulla forza di attrito :

Una massa di 2 kg è posta su un piano orizzontale **scabro**. Sapendo che il coefficiente di attrito statico vale 0.4 determinare :

- l'intensità della forza di attrito
- l'intensità della forza da applicare alla massa per metterla in moto





Forze agenti sulla massa :

- **forza peso**, verso il basso :

$$\mathbf{P} = m \mathbf{g}$$

- **reazione vincolare** del piano, verso l'alto :

$$\mathbf{N} = -\mathbf{P}$$

- la forza applicata \mathbf{F} , da determinare
- **forza di attrito**, lungo la direzione del moto ma verso opposto al vettore \mathbf{F} , in modulo

$$|\mathbf{F}_a| = \mu_s |\mathbf{N}|$$

Numericamente :

$$|\mathbf{P}| = |\mathbf{N}| = 2 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 = 19.6 \text{ N}$$

$$|\mathbf{F}_a| = \mu_s mg = 0.4 \cdot 19.6 \text{ N} = 7.84 \text{ N}$$

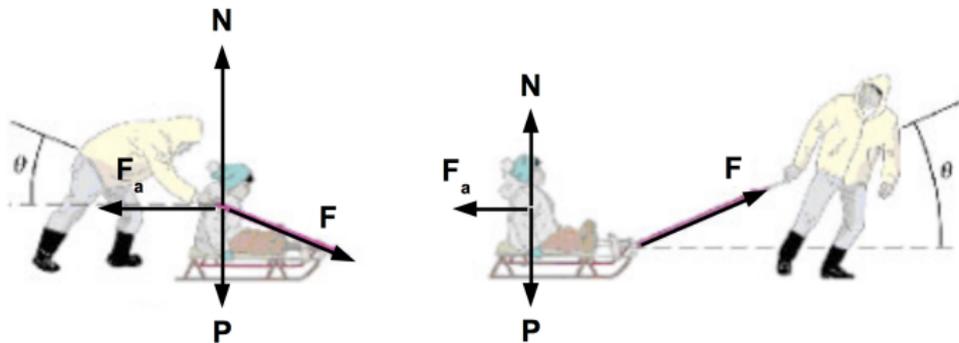
Per poter mettere in movimento la massa la forza applicata deve essere in modulo più grande della forza di attrito, quindi :

$$|\mathbf{F}| > |\mathbf{F}_a| \rightarrow |\mathbf{F}| > 7.84 \text{ N}$$

Esercizio 3

A parità di forza applicata e di angolo di inclinazione, conviene **spingere** oppure **tirare** una slitta ?





- le forze che agiscono sono: la forza peso $\mathbf{P} = m \mathbf{g}$, la forza applicata \mathbf{F} , la reazione vincolare del terreno \mathbf{N} e la forza di attrito \mathbf{F}_a
- la forza applicata \mathbf{F} può essere scomposta in una componente parallela e in una verticale :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y = F \cos \theta \mathbf{i} + F \sin \theta \mathbf{j}$$

- la **forza di attrito dinamico** dipende dalla reazione vincolare \mathbf{N} e in modulo vale :

$$F_a = \mu_d N$$

MA... la reazione vincolare è diversa nei due casi !

$$N_1 = m g + F \sin \theta \rightarrow \text{spingendo}$$

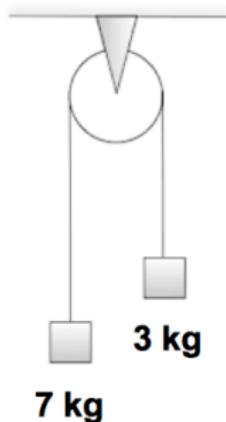
$$N_2 = m g - F \sin \theta \rightarrow \text{tirando}$$

$N_2 < N_1 \rightarrow$ la forza di attrito è minore quando **tiro** la slitta

Esercizio 4

La **macchina di Atwood** (o semplicemente ... carrucola ideale)

Due masse di valore 3 kg e 7 kg sono connesse tramite un filo inestensibile e di massa nulla posto sopra una carrucola ideale :



Calcolare :

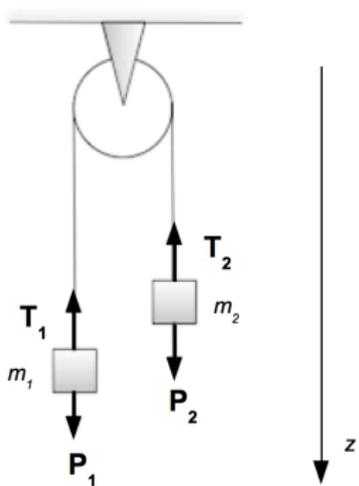
- l'accelerazione del sistema formato dalle due masse
- la tensione del filo

Descriviamo il sistema mettendoci nel caso più generale possibile :

- ho due masse $m_1 = 7 \text{ kg}$ e $m_2 = 3 \text{ kg}$
- sulle masse agisce la forza peso, quindi :

$$\mathbf{P}_1 = m_1 \mathbf{g} \quad \mathbf{P}_2 = m_2 \mathbf{g}$$

- le masse sono appese, quindi identifico sul filo **le tensioni** \mathbf{T}_1 e \mathbf{T}_2
- **scelgo** una direzione per il mio sistema di riferimento, ad esempio un asse z verso il basso (come la direzione del vettore \mathbf{g})



Applico la **legge di Newton** alle due masse :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}_1 + \mathbf{T}_1 = m_1 \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{P}_2 + \mathbf{T}_2 = m_2 \mathbf{a}_2 \end{array} \right.$$

Ma il testo del problema ci dice anche che :

- il filo è **inestensibile** e di **massa nulla**
- la carrucola è **ideale**, quindi anch'essa di massa nulla (non ho "inerzia")

Filo inestensibile e di massa nulla significa che :

- 1) **non ci sono forze elastiche di richiamo aggiuntive**
- 2) **non c'è accelerazione sul filo**

quindi il filo si limita a **cambiare direzione alle forze senza alterarne il modulo**

Questo significa che :

- **la tensione del filo è unica**, $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2 = \mathbf{T}$
- le due masse si muovono con accelerazioni uguali ed opposte, $\mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_2$

Fatte queste premesse il sistema diventa :

$$\begin{cases} \mathbf{P}_1 + \mathbf{T} = m_1 \mathbf{a} \\ \mathbf{P}_2 + \mathbf{T} = -m_2 \mathbf{a} \end{cases}$$

Passando alle componenti :

$$\begin{cases} m_1 g - T = m_1 a \\ m_2 g - T = -m_2 a \end{cases}$$

Sottraggo membro a membro le due equazioni :

$$m_1 g - \cancel{T} - m_2 g + \cancel{T} = m_1 a + m_2 a \rightarrow (m_1 - m_2) g = (m_1 + m_2) a$$

L' **accelerazione** del sistema è quindi :

$$\boxed{a = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) g} = \left(\frac{7 \text{ kg} - 3 \text{ kg}}{7 \text{ kg} + 3 \text{ kg}} \right) 9.81 \text{ m/s}^2 = 4.057 \text{ m/s}^2$$

Osserviamo come nel caso di masse uguali $m_1 = m_2$ il risultato è correttamente $a = 0$ e le masse rimangono in equilibrio statico.

Nota l'accelerazione posso ricavare anche la **tensione del filo**, ad esempio dalla prima equazione del sistema :

$$m_1 g - T = m_1 a$$

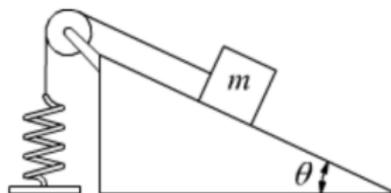
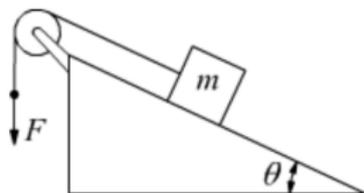
$$\rightarrow T = m_1 (g - a) = m_1 \left(g - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \right) = m_1 \left(1 - \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) g$$

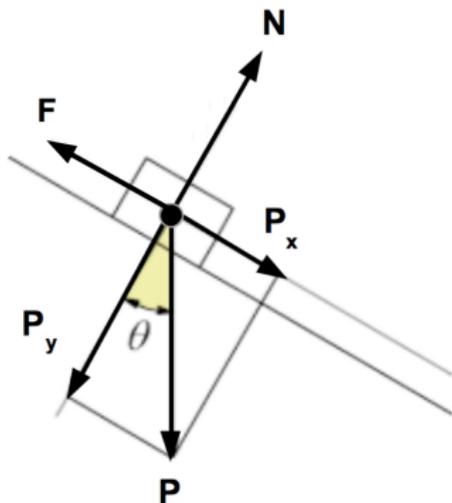
$$\boxed{T = 2 \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) g} = 2 \frac{7 \text{ kg} \cdot 3 \text{ kg}}{(7 + 3) \text{ kg}} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2 = 41.2 \text{ N}$$

Esercizio 5

Un problema di **statica** :

Un blocco di massa 4 kg è fermo su un piano inclinato privo di attrito, tenuto in equilibrio da una forza di modulo 20 N come in figura. Trovare l'inclinazione del piano. Sostituendo la forza con una molla di costante elastica 80 N/m trovare l'allungamento della molla e l'energia potenziale elastica in essa immagazzinata.





- la carrucola e il filo sono ideali, quindi si limitano a **cambiare direzione alla forza applicata senza cambiarne il modulo**
- scegliamo come al solito un sistema di riferimento cartesiano (x, y) che giace sul piano e scomponiamo la forza peso $\mathbf{P} = m \mathbf{g}$ rispetto a questo sistema :

$$\begin{cases} P_x = m g \sin \theta \\ P_y = m g \cos \theta \end{cases}$$

Se il corpo è **fermo** significa che **la risultante delle forze** che agiscono su di esso è nulla :

$$\boxed{\sum \mathbf{F} = 0}$$

Passando alle componenti :

$$\begin{cases} P_x - F = 0 \\ P_y - N = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_x = F \\ P_y = N \end{cases}$$

Dalla condizione di equilibrio lungo l'asse x possiamo quindi ricavare l'angolo di inclinazione θ del piano :

$$F = m g \sin \theta \rightarrow \sin \theta = \frac{F}{m g} \rightarrow \boxed{\theta = \arcsin \left(\frac{F}{m g} \right)}$$

Numericamente :

$$\theta = \arcsin \left(\frac{20 \text{ N}}{4 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ m/s}^2} \right) = 0.53 \text{ rad} = 0.53 \text{ rad} \cdot \frac{360^\circ}{2 \pi \text{ rad}} = 30.4^\circ$$

Sostituendo la forza applicata con una **molla di costante elastica** k , dalla *legge di Hooke* ricaviamo subito di quanto si allunga la molla :

$$F = k \Delta x \rightarrow \Delta x = \frac{F}{k} = \frac{20 \text{ N}}{80 \text{ N/m}} = 0.25 \text{ m} = 25 \text{ cm}$$

L'**energia potenziale elastica** immagazzinata è invece :

$$U = \frac{1}{2} k \Delta x^2 = 0.5 \cdot 80 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0.25 \text{ m})^2 = 2.5 \text{ N m} = 2.5 \text{ J}$$